УДК 539.374 DOI: 10.37102/0869-7698_2021_218_04_08

А.А. БУРЕНИН, Л.В. КОВТАНЮК

Об одномоментной сменяемости в механизмах производства необратимых деформаций

Обсуждаются особенности в постановках краевых задач механики деформирования, когда на границах областей пластического или вязкопластического течений происходят одномоментные изменения в механизмах производства необратимых деформаций. Если не пренебрегать необратимыми деформациями ползучести, то такие изменения неизбежны. При развитии области пластического течения этот механизм меняется с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) и наоборот – при разгрузке.

Ключевые слова: упругость, вязкость, пластичность, деформации ползучести, вязкопластическое течение.

On one-time changeability in the mechanisms of production of irreversible deformations. A.A. BURENIN[1], L.V. KOVTANYUK[2] ([1]Institute of Engineering and Metallurgy FEB RAS of the Khabarovsk Federal Research Center FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, [2]Institute of Automation and Control Processes, FEB RAS, Vladivostok).

Peculiarities in the formulation of boundary value problems of deformation mechanisms, when at the boundaries of the fields of plastic or viscoplastic flows, there are simultaneous changes in the mechanisms of production of irreversible deformations are discussed. This is inevitable, unless irreversible creep deformations are neglected. With the development of plastic flow field, this mechanism changes from viscous (creep) to plastic (flow).

Key words: elasticity, viscosity, plasticity, creep deformations, viscoplastic flow.

Введение

Среди проблемных задач современной механики деформирования выделим задачу об одномоментном изменении в механизме производства необратимых деформаций на продвигающихся границах пластических областей. С данной задачей столкнулись при настойчивой попытке провести расчеты технологических операций холодной формовки и обтяжки, широко используемых в современном авиастроении [4, 5, 21]. Решение задачи фундаментальной механики по моделированию процесса деформирования материалов, когда они приобретают большие деформации, обладая упругими, вязкими и пластическими свойствами, является ответом на настойчивый вызов именно технологической практики производства металлоизделий с повышенными функциональными свойствами.

Отмеченные технологические операции – характерный пример этого. Технологические требования, диктуемые деформационными свойствами материалов, подвергающихся подобным операциям при изготовлении элементов конструкций планеров летательных аппаратов, запрещают их проведение при повышенных температурах и с высокими скоростями

БУРЕНИН Анатолий Александрович – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник (Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре), *КОВТАНЮК Лариса Валентиновна – член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник, заведующая лабораторией (Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток).
*E-mail: lk@iacp.dvo.ru

формоизменения. Приходится проводить такие технологические операции при умеренных температурах за счет медленного необратимого процесса ползучести. Однако и при таких процессах полностью исключить образование локальных областей пластического течения невозможно [21]. Они с необходимостью возникают в местах воздействия на материал оснасткой. При этом присутствие областей пластического течения приводит к существенному изменению распределений напряжений в элементе конструкции, влияя таким образом на протекание процесса ползучести. Следовательно, оказываются необходимыми задачи теории больших деформаций, в которых одновременно присутствуют и области вязкоупругого деформирования (области ползучести), и области пластического течения.

Продвигающиеся по деформируемому материалу поверхности (упругопластические границы), разделяющие данные различные области деформирования, оказываются местом внутренней перестройки в процессе необратимого деформирования и местом постановки соответствующих краевых условий. При квазистатическом деформировании на упругопластических границах напряжения и деформации непрерывны, включая и составляющие последних. Упругие свойства деформируемого материала задают консервативную часть процесса деформирования, вязкие и пластические – его диссипативную составляющую. В таком случае в качестве термодинамических параметров состояния наряду с температурой следует принять обратимые (термоупругие) и необратимые составляющие [14, 15] полных деформаций. В соответствии с подходами неравновесной термодинамики необратимые деформации не разделяются на деформации ползучести и деформации пластического течения.

Для термодинамических параметров состояния в неравновесном процессе деформирования согласно формализму термодинамики необратимых процессов [14, 15, 20] следует записать дифференциальные уравнения их изменения (переноса). Далее с целью упрощения выкладок рассматриваем изотермический случай. Необходимо, следовательно, записать дифференциальные уравнения переноса обратимых и необратимых деформаций. С точки зрения термодинамики слагаемые типа источника в этих уравнениях являются термодинамическими потоками; они задают скорости изменения составляющих полных деформаций. Потоковые слагаемые этих уравнений устанавливают взаимозависимость данных составляющих в процессе деформирования. Термодинамическими силами, соответствующими обозначенным термодинамическим потокам (скоростям деформаций), согласно уравнению баланса энтропии оказываются напряжения. Принимаемые определяющие законы необходимы для связывания термодинамических потоков с термодинамическими силами. В рассматриваемом случае определяющими законами являются закон упругости и законы ползучести и пластического течения. Единственным ограничением для их записи является условие положительности источников энтропии в уравнении ее баланса [14, 20].

Взаимозависимость в изменении обратимых и необратимых деформаций в процессе деформирования диктуется жестким требованием о геометрической корректности в кинематических построениях [7, 10, 18, 25]. Выполнить такое требование непросто. Иногда его даже заменяют [18] задачей «выбора» объективной производной, связывающей необратимые деформации со скоростями их изменения. Разделение измеряемых в опытах полных деформаций на составляющие является гипотетическим и с необходимостью диктуется только нуждами в построении теории. Обратимые и необратимые деформации экспериментально измерить невозможно. Вводятся они при записи дифференциальных уравнений их переноса [6, 7, 10, 20], которые, по существу, являются их определениями.

Необратимые деформации, являясь термодинамическим параметром состояния в процессе деформирования, в таком своем свойстве не разделяются на деформации ползучести и деформации пластического течения. Однако последние имеют одно принципиальное различие. Деформации ползучести, задаваемые вязкими свойствами деформируемого материала, начинают свой рост непосредственно с началом процесса деформирования. Деформации пластического течения начинают свой рост только при достижении напряжениями поверхности нагружения [12, 16]. Далее с ростом напряжений развивается область пластического течения. Граница этой области оказывается местом, где изменяется механизм производства необратимых деформаций с вязкого (ползучесть) на пластический (течение) при активном процессе деформирования и наоборот – при разгрузке. Накопленные необратимые деформации в условиях ползучести становятся начальными значениями для дальнейшего их роста в новых условиях пластического течения. При разгрузке определяющие законы ползучести и пластического течения меняются местами. Произведенные до того необратимые деформации на разгружающей упругопластической границе становятся начальными значениями для их продолжающегося роста в условиях ползучести.

Открытым остается вопрос о характере такой одномоментной перемены в механизме производства необратимых деформаций. Следует заметить, что такой фундаментальный вопрос возникает не только в теории больших деформаций. С той же определенностью он появляется и в случае малых деформаций. В статье [22] предлагаются к рассмотрению два возможных крайних случая. В первом из них считается, что в области вязкопластического течения необратимые деформации производятся и за счет пластических свойств материала в форме деформаций пластического течения, и, одновременно, за счет вязких свойств в форме деформаций ползучести. Такой процесс был назван параллельным. Во втором случае вязкий механизм отключался, и вязкие свойства учитывались только в качестве причины, тормозящей течение (последовательный процесс). Очевидно, что между такими крайними предположениями возможен спектр иных, где следствия вязких и пластических свойств комбинируются.

Следствия уравнений переноса

Дифференциальные уравнения изменения (переноса) тензоров обратимых $\boldsymbol{e}$ и необратимых $\boldsymbol{p}$ деформаций в работе [7] предложены в форме

$$
\begin{gathered}
\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}\right)\cdot e + e\cdot\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{z}\right)\right),\\
\frac{D\boldsymbol{p}}{Dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} - \varphi\cdot\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\cdot\varphi^{T} = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В зависимостях (1) введены обозначения

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla v + \nabla^{T}\mathbf{v}\right);\quad v = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt},\\
\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} + \mathrm{z}\left(\boldsymbol{\varepsilon}, e\right);\quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla v - \nabla^{T} v\right).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

В уравнениях (1) и (2) принята система пространственных координат Эйлера; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ – векторы перемещений и скорости. Нелинейная составляющая $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e})$ тензора поворота $\boldsymbol{\omega}$ здесь не выписывается из-за громоздкости. Такую запись с выводом (1) можно найти в монографии [6]. Заметим только, что при $\mathbf{z}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{e}) = 0$ введенная первым равенством второй зависимости из уравнений (1) объективная производная совпадает с производной Зарембы–Яумана [13]. Источниками в дифференциальных уравнениях переноса (1) являются тензоры $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно для обратимых и необратимых деформаций. Следовательно, принимается положение об аддитивном разложении тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ скоростей полных деформаций на сумму тензоров скоростей обратимых $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}$ и необратимых $\boldsymbol{\gamma}$ составляющих. Объективная производная тензоров по времени, введенная вторым равенством из (1), не является предметом предположения или выбора. Ее конкретная запись – необходимое следствие геометрической корректности кинематических построений. Только в таком случае подобные построения геометрически безупречны. Согласно уравнениям (1) возможен случай только консервативного деформирования, когда $\boldsymbol{\gamma} = 0$ и тензор необратимых деформаций неизменен. В таком случае вторая зависимость из (1) задает закономерности изменения компонент тензора $\boldsymbol{p}$, при том что тензор $\boldsymbol{p}$ не изменяется. В любом ином случае изменение тензора $\boldsymbol{e}$ влечет за собой изменения тензора $\boldsymbol{p}$, и наоборот. В работе [17] рассмотрены обобщения (1) и (2) на случай учета температурных и сугубо реологических эффектов. С тензором полных деформаций Альманси $\boldsymbol{d}$ тензоры обратимых и необратимых деформаций, определенные зависимостями (1) и (2), связаны соотношением

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{p} - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}. \tag{3}$$

Согласно уравнению (3) введенный в выражениях (1) тензор обратимых деформаций $\boldsymbol{e}$ является лишь главной линейной частью тензора упругих деформаций $\boldsymbol{e} - 0{,}5\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}$. Введение в рассмотрение тензора $\boldsymbol{e}$ продиктовано удобством в записи для последнего дифференциального уравнения его изменения. Только с использованием данного тензора удается ввести имеющий прозрачный механический смысл тензор необратимых деформаций $\boldsymbol{p}$ и однозначно ввести в качестве геометрического следствия объективную производную тензоров деформаций по времени.

Локальное следствие закона сохранения энергии запишем в виде

$$\rho\frac{d\xi}{dt} + div\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{q}$ – вектор теплового потока; $\xi = \xi(\boldsymbol{d}, s)$, s – плотности распределения внутренней энергии и энтропии. Для квазистационарных процессов деформирования чаще используется иной термодинамический потенциал $\psi = \xi - Ts$, называемый свободной энергией. В общем случае $\psi = \psi(\boldsymbol{d}, T)$, где Т – текущая температура. Но при решении конкретных краевых задач теории больших деформаций [6, 13, 26] чаще всего принимается, что $\psi = \psi(\boldsymbol{e}, T)$. Это позволяет разделить консервативную и диссипативную части процесса деформирования. Из уравнения (4) в таком случае следует [6]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{e}}\cdot(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -div\boldsymbol{J} - T^{-2}\boldsymbol{q}\cdot\nabla T + T^{-1}\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\boldsymbol{\gamma}. \tag{6}$$

В уравнениях (5) и (6) ρ – плотность деформируемого материала, $\boldsymbol{J}$ – вектор полного потока энтропии, $\boldsymbol{I}$ – единичный тензор второго ранга. Зависимость (5) является аналогом известной в теории упругости [19] формулы Мурнагана, позволяющей при задании термодинамического потенциала $\psi = \psi(\boldsymbol{e}, T)$ связать однозначной зависимостью напряжения с упругими деформациями и температурой. При $\boldsymbol{p} = 0$ имеем формулу Мурнагана в ее классическом для нелинейной теории упругости виде [6, 19]

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{d}}\cdot(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{d}).$$

Согласно уравнению баланса энтропии (6) производство энтропии связано с двумя неравновесными процессами, первым из которых является неравновесный процесс теплопроводности (предпоследнее слагаемое правой части уравнения (6)), а вторым – неравновесный процесс необратимого деформирования (последнее слагаемое правой части уравнения (6)). Такой источник энтропии в уравнении (6), отвечающий за вклад необратимого деформирования в производство энтропии, должен быть положительным $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \geq 0$ и требовать зависимости $\boldsymbol{\gamma} = \Gamma(\boldsymbol{\sigma})$, обеспечивающей данное неравенство. Определяющий закон $\boldsymbol{\gamma} = \Gamma(\boldsymbol{\sigma})$ только в простейшем случае вязкой жидкости (закон Ньютона) принимается линейным; для твердого тела данная зависимость существенно нелинейна.

Определяющие законы и их перемена на упругопластических границах

С началом процесса деформирования необратимые деформации в теле производятся за счет необратимого процесса ползучести. Источник необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в уравнениях (1) и (6) следует отождествлять с тензором скоростей деформаций ползучести $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v$. В качестве определяющего закона достаточно выбрать любое из многочисленных предложений по заданию закона ползучести. Такой выбор может быть связан с деформационными свойствами исследуемого материала, свойствами используемого математического или алгоритмического аппарата, с личными предпочтениями, наконец. Развиваемый подход в этом не ставит ограничений. В качестве примера выбираем определяющий закон в форме классического степенного закона Нортона [27]

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n. \tag{7}$$

Здесь B, n – постоянные материала. В качестве Σ чаще всего принимается октаэдрическое напряжение (интенсивность напряжений)

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\right)}, \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} tr\sigma.$$

В выражении (8) σ_1, σ_2, σ_3 – главные значения тензора напряжений. На границе области пластического течения определяющий закон ползучести (7) и (8) должен быть заменен на определяющий закон, основанный преимущественно на законе пластического течения. Напряжения и деформации на такой граничной поверхности непрерывны, но скорости деформаций могут претерпевать разрыв первого рода.

Потребуем непрерывности в скоростях производства необратимых деформаций. Тогда, если $f(\sigma, k) = 0$ – уравнение поверхности нагружения в пространстве напряжений и k – предел текучести, то для обозначенных ранее крайних случаев получаем возможность записать

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^v = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0. \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon}^v = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0. \tag{10}$$

Скорости необратимых деформаций $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(r,t)$, скорости деформаций пластического течения $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p(r,t)$ и скорости деформаций ползучести $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{\varepsilon}^v(r,t)$ являются в законах (9) и (10) функциями места $\boldsymbol{r}$ и времени t. В отличие от них $\boldsymbol{\varepsilon}_0^v = \boldsymbol{\varepsilon}_0^v(\boldsymbol{r})$ – функция только места. Согласно уравнению (9) в области течения необратимые деформации производятся только в условиях течения за счет пластических свойств материала. Деформации ползучести и их скорости $\boldsymbol{\varepsilon}_0^v(\boldsymbol{r})$ влияют на производство необратимых деформаций в области течения только в форме начальных условий для развития области пластического течения и роста необратимых деформаций за счет процесса течения. В пластической области $\boldsymbol{\varepsilon}_0^v(\boldsymbol{r})$ не меняется со временем, оно равно $\boldsymbol{\varepsilon}^v(\boldsymbol{r},t)$, если в последнем время фиксировать моментом прихода в данную точку места $\boldsymbol{r}$ упругопластической границы. При записи условий на разгружающей упругопластической границе эти выводы следует повторить в обратном порядке. Такой порядок в перемене механизмов производства необратимых деформаций называем последовательным. Для него справедливо уравнение (9) и

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\varepsilon}_0^p = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad V(\Sigma) = B\Sigma^n. \tag{11}$$

В уравнении (11) $\boldsymbol{\varepsilon}_0^p(\boldsymbol{r})$ следует также считать при фиксировании времени в $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{r},t)$ в момент прихода в данную точку $\boldsymbol{r}$ разгружающей упругопластической границы.

В другом крайнем случае (параллельном) для $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ в уравнении (10) продолжает действовать закон ползучести, например в форме зависимостей (7) и (8). Иногда за счет обобщения

$$(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\beta}) = \frac{8}{3}k, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\gamma}.$$

классического условия пластичности максимальных октаэдрических напряжений (условия Мизеса) учитывают вязкое сопротивление материала его пластическому течению. В уравнении (12) η – коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению. Данное условие использовалось в работе [8] при решении задачи со сферической симметрией о последовательной смене механизмов производства необратимых деформаций при сжатии полого шара. Отметим, что обстоятельство, когда условие течения связано с переменной Σ, как в уравнениях (7) и (11), являющейся аргументом потенциала ползучести, существенно упрощает решение. В этом случае легче удовлетворить условиям равенства напряжений и деформаций на упругопластической границе.

Среди условий пластического течения выделяются кусочно-линейные. Их использование в прошлом веке привело к заметному продвижению в теории пластичности [12, 16]. Это условие максимальных касательных напряжений (условие Треска–Сен-Венана) и условие максимальных приведенных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева) [12, 16], которые, соответственно, записываются в форме

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 2k, \tag{13}$$

$$\max\left|\sigma_i - \sigma\right| = \frac{3}{4}k. \tag{14}$$

При использовании кусочно-линейных пластических потенциалов (13) или (14) аргументом потенциала ползучести (7) выбираются функции $z = \max\left|\sigma_i - \sigma_j\right|$, если условие течения выбрано в форме (13), и $\Sigma = \max\left|\sigma_i - \sigma\right|$, если условие течения выбрано в форме (14). Особенности использования потенциалов ползучести с кусочно-линейными аргументами рассматривались в работах [9, 11].

Обобщение условий пластического течения Треска–Сен-Венана (13) на случай учета сопротивления пластическому течению можно принять в форме

$$\max\left|\sigma_i - \sigma_j\right| = 2k - 2\eta\max\left|\gamma_k\right|. \tag{15}$$

Здесь γ_k – главные значения тензора скоростей необратимых деформаций.

В работах [1–3, 23] рассмотрен ряд задач теории больших упруговязкопластических деформаций, в которых принимается условие пластического течения (15) и в уравнении (7) в качестве Σ используется кусочно-линейная зависимость $\Sigma = \max\left|\sigma_i - \sigma_j\right|$. Прослеживается весь процесс вискозиметрического деформирования от начала до окончательного снятия внешних усилий, когда материал зажат между коаксиальными жесткими цилиндрическими поверхностями и деформируется за счет поворота одной из этих поверхностей. Происходит последовательная смена механизмов производства необратимых деформаций на возникающих и продвигающихся упругопластических границах.

Наряду с последовательным параллельный процесс совмещенных пластических деформаций и деформаций ползучести рассматривался в работах [24, 28] в задаче о продвижении материала по трубе с жесткими стенками за счет изменяющегося перепада давления.

Полученными решениями конкретных краевых задач подтверждается возможность их постановок в рамках как параллельного существования вязкого (ползучесть) и пластического (течение) механизмов производства необратимых деформаций, так и их последовательной сменяемости с вязкого на пластический при активном процессе нагружения и, наоборот, при разгрузке.

Публикация посвящается светлой памяти наших учителей – Геннадия Ивановича Быковцева и Вениамина Петровича Мясникова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // ДАН. 2016. Т. 470, № 3. С. 275 – 278.

2. Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. О последовательной сменяемости в механизмах производства больших необратимых деформаций // Прикл. мат. и мех. 2021. Т. 85, № 1. С. 106–120.

3. Бегун А.С., Ковтанюк Л.В., Лемза А.О. Смена механизмов накопления необратимых деформаций материалов на примере их вискозиметрического деформирования // Изв. РАН, МТТ. 2018. № 1. С. 103–112.

4. Белых С.В., Бормотин К.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. Т. 22, № 4. С. 144–156.

5. Белых С.В., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. Об учете вязких свойств материалов в теории больших упругопластических деформаций // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 3. С. 108–130.

6. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.

7. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластических сред при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 317, № 2. С. 199–201.

8. Буренин А.А., Галимзянова К.Н., Ковтанюк Л.В., Панченко Г.Л. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // ДАН. 2018. Т. 482, № 4. С. 403–406.

9. Буренин А.А., Ярушина В.М. Плоское напряженное состояние в условиях нелинейной неустановившейся ползучести // ДВМЖ. 2002. Т. 3, № 1. С. 64 – 78.

10. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // ДАН. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.

11. Быковцев Г.И., Ярушина В.М. Об особенностях модели неустановившейся ползучести, основанной на использовании кусочно-линейных потенциалов // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций (к 60-летию Г.И. Быковцева). Владивосток: Дальнаука, 1988. С. 9–26.

12. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 428 с.

13. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели нелинейной вычислительной механики. Казань: Изд-во КГУ, 2009. 465 с.

14. Де Гроот С., Мазур М. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1064. 465 с.

15. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.

16. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

17. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.

18. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 232 с.

19. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

20. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.

21. Олейников А.И., Пекарш А.И. Интегрированное проектирование изготовления монолитных панелей. М.: Эком, 2009. 109 с.

22. Фирсов С.В., Прокудин А.Н., Буренин А.А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // Сиб. журн. индустр. мат. 2019. Т. 22, № 4. С. 121–133.

23. Begun A.S, Burenin A.A, Kovtanyuk L.V, Lemza A.O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // Arch. Appl. Mech. 2020. Vol. 90. P. 829–845.

24. Firsov S.N., Prokudin A.N. Antiplane Axisymmetric Creep Deformation of Incompressible Medium // Journ. Siberian Federal University – Mathematics and Physics. 2015. Vol. 8, N 4. P. 406–415.

25. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. Sr. E. J. Appl. Mech. 1969. Vol. 36, N 1. P. 1–6.

26. Naghdi P.M. Recent dtvtlopment in finite deformation plasticity // Plasticity Today: Modeling, Methods and Application. L., 1985. P. 75–83.

27. Norton F.H. The creep steel of high temperature. N.Y.: McGpaw Hill, 1929. 110 p.

28. Prokudin A.N., Firsov S.V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // Jour. Siberian Federal University – Mathematics and Physics. 2018. Vol. 11, N 4 (11). P. 399–410.